~~35~~

البند 6 : الاستدلال الإحصائي

يتكون الاستدلال الإحصائي من جزئين أساسيين

(I) التقدير الإحصائي Statistical Estimation

(II) اختبار الفرضيات الإحصائية Hypotheses Testing

في هذا البند نناقش الاستدلال الإحصائي للمعلمتين

- متوسط المجتمع μ
- نسبة ظاهرة في المجتمع P

(I) التقديرات الإحصائية Statistical Estimations

- التقدير بنقطة

$\bar{X}$ تقدير نقطي لمتوسط المجتمع μ

$\hat{p}$ = = لنسبة ظاهرة في مجتمع P

- فترة ثقة Confidence Interval

لديك المعلمة θ وتقديرها $\hat{\theta}$ (تقدير نقطي)

اذا كان $P(L<\theta<U)=1-\alpha$ فان (L,U)

تمثل فترة ثقة للمعلمة θ بدرجة موثوقية $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$

α : مستوى الدلالة الإحصائية او مستوى المعنوية

وينتج عن ~~معامل الثقة~~ درجة الثقة معامل يسمى معامل الثقة

يستخرج من الجداول الإحصائية .

فترات الثقة في هذا المقرر تتخذ الصورة التالية

الحد الادنى = L = تقدير النقطة - الخطأ المسموح به

" الاعلى = U = تقدير النقطة + الخطأ المسموح به

حيث ان الخطأ المسموح به = معامل الثقة X الخطأ المعياري

(١) فترات الثقة للأوساط الحسابية μ

نفترض ان البيانات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مأخوذة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma)$.

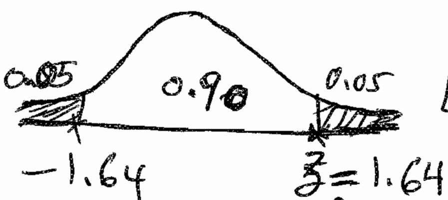
(٢) الانحراف المعياري للمجتمع σ معروف

- التقدير النقطي للمتوسط الحسابي $\mu = \bar{X}$

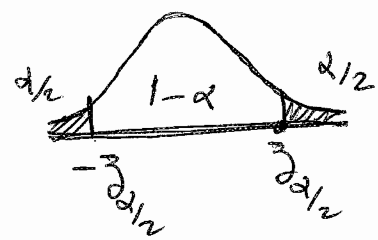
- توزيع $\bar{X}$ توزيع طبيعي بانحراف معياري = خطأ معياري

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- معامل الثقة : Z قيمة تأخذ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري مرتبطة بدرجة الموثوقية $1-\alpha$



$\boxed{1-\alpha=0.90}$



معامل الثقة المقابلة لدرجة موثوقية 90%

الجدول التالي يعطي معاملات الثقة Z المرتبطة بدرجات موثوقية مختلفة:

مستوى المعنوية	α	0.01	0.05	0.10
درجة الموثوقية	$1-\alpha$	0.99	0.95	0.90
معامل الثقة	Z	2.58	1.96	1.64

اذاً فترة الثقة للمتوسط μ = (L, U)

$$L = \bar{X} - E \quad , \quad U = \bar{X} + E$$

$$\text{Where } E = Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ملاحظات

* كلما زادت حجم العينة n فإن E تنقص وبالتالي يقصر طول الفترة
* كلما صغر التباين σ^2 فإن E تنقص وبالتالي يقصر طول الفترة.
* كلما ~~قل~~ قلت درجة الموثوقية $1-\alpha$ فإن الفترة تقصر

مثال: نرغب في دراسة متوسط ساعات مشاهدة التلفاز TV في دولة الكويت. سحبت عينة حجمها 25 من مجتمع الدراسة الذي يتبع توزيع طبيعي بانحراف معياري 10 ساعات/الأسبوع فكان متوسط ساعات المشاهدة المحسوبة من العينة 30 ساعة/الأسبوع. استخدم البيانات لإيجاد فترة ثقة 95% لمتوسط ساعات المشاهدة لمجتمع الدراسة.

(38)

- التقدير النقطي $\bar{X}=30$

- معامل الثقة المتوافق مع درجة موثوقية 95% $= z = 1.96$

- الخطأ المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \boxed{2}$

- $E = (\underset{\uparrow \, z}{1.96})(\underset{\uparrow \, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2}) = 3.92$ الخطأ المسموح

- فترة الثقة (L, U)

$$L = 30 - 3.92 = 36.08$$

$$U = 30 + 3.92 = 33.92$$

$$\Rightarrow (36.08, 33.92)$$

(ب) الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم (σ غير معلومة)

- توزيع $\bar{X}$ توزيع t بدرجات حرية $n-1$
حيث يتم استخراج معاملات الثقة من جدول t بدلاً من التوزيع الطبيعي

- ~~نعتمد~~ نعتمد على Printout من SPSS في تحديد فترات الثقة

مثال: يقوم احد الباحثين بدراسة معدل الطلبة في جامعة الكويت. سحبت عينة من 150 طالب ~~...~~ وكانت النتائج ملخصة في SPSS في الجدول ادناه. اوجد 90% فترة ثقة للوسط الحسابي لمعدل طلبة جامعة الكويت.

Test Value = 0					
t	df	Sig.(2-tailed)	Mean diff.	90% C.I. of the diff.	
				Lower	Upper
120.7	149	.000	3.25	3.15	3.45

(1) اذا كانت قيمة Test value=0 فإن 90% فترة ثقة لمتوسط درجات الطلبة $= (3.15, 3.45)$

(2) لو افترضنا ان Test Value = 0.5
فإن 90% فترة ثقة للمتوسط $\mu = (3.15+0.5, 3.45+0.5)$
$= (3.65, 3.95)$

(3) اذا كانت Test Val.=0 فإن تقدير النقطة لـ μ
$= \bar{X} = 3.25$

(4) اذا كانت Test Value=0.5 فإن تقدير النقطة لـ μ
$= \bar{X} = 3.25+0.5 = \boxed{3.75}$

(2) فترة الثقة للنسبة p

- تقدير النقطة لـ $p = \hat{p}$
- توزيع $\hat{p}$ تتبع ~~التوزيع~~ التوزيع الطبيعي تقريباً وبالتالي
- فإن معامل الثقة هو z الذي يستخرج من الجدول التوزيع الطبيعي
- الخطأ المسموح به $= E =$ معامل الثقة × الخطأ المعياري

$$= z \times \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- الحد الأدنى $L = \hat{p} - E$
الحد الأعلى $U = \hat{p} + E$ $\Leftarrow$ فترة الثقة (L, U)

مثال : في استطلاع للرأي العام سحبت عينة من 100 شخص في الكويت وتبين ان 40 منهم يؤيدون تغيير قانون الانتخاب الحالي . انشيء فترة ثقة بمستوى موثوقية 90% لنسبة المؤيدين لتغيير القانون الانتخابي ،

- التقدير $\hat{p} = \frac{40}{100} = 0.4$

- الخطأ المسموح به $E = Z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

$$= (1.64)\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{100}} = (1.64)(0.05)$$

$$= 0.08$$

- الحد الادنى $L = 0.4 - 0.08 = 0.32$

الحد الأعلى $U = 0.4 + 0.08 = 0.48$

$\Leftarrow$ 90% فترة الثقة $= (0.32, 0.48)$

Testing Hypotheses — اختبار الفرضيات الإحصائية

- الفرضية الإحصائية: جملة حول معلمة من معلمات المجتمع (اما μ او P)

- هناك فرضيتان (١) فرضية العدم H_0
(٢) الفرضية البديلة H_1

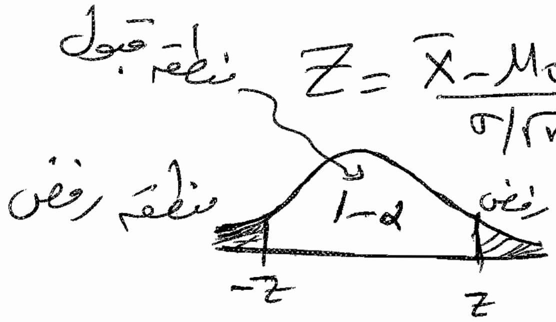
(١) اختبار الفرضيات حول المتوسط μ

نفترض ان البيانات مأخوذة من مجتمع له توزيع طبيعي بوسط حسابي μ وانحراف معياري σ

(أ) الانحراف المعياري σ معلوم

- $H_0: \mu = \mu_0 \quad vs. \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

- حساب قيمة احصاء الاختبار $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$



- يتم استخراج معاملات الثقة

- القرار: اذا كانت قيمة احصاء الاختبار Z اكبر من z او اقل من $-z$ فاننا نرفض H_0
واذا كانت قيمة Z بين z وكذلك $-z$ فاننا نقبل H_0.

مثال: سحبت عينة من 64 شخص من مشاهدي التلفاز TV من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 10 ساعة/ أسبوع فكان متوسط ساعات المشاهدة 30 ساعة/أسبوع. اختبر فيما اذا كان متوسط ساعات المشاهدة لجميع المشاهدين يختلف عن 25 ساعة/أسبوع (استخدم مستوى دلالة $= 0.05$)

* الفرضيات

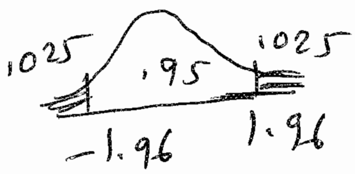
العدم $\rightarrow H_0: \mu = 25$

البديل $\rightarrow H_1: \mu \neq 25$

* احصاء الاختبار

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{30-25}{10/\sqrt{64}} = \boxed{4}$$

* القرار والسبب $1-\alpha = 0.95$



بما ان قيمة احصاء الاختبار $= 4$ أكبر من 1.96 نرفض H_0

* التفسير: نستنتج ان معدل مشاهدة التلفاز $\neq 25$

---

(2) الانحراف المعياري σ غير معلوم

* يتم استخدام توزيع t وذلك من خلال برنامج SPSS

مثال: المطلوب دراسة فيما اذا كان الوسط الحسابي للمعدل العام لطلبة جامعة الكويت يختلف عن 3.2 عند مستوى معنوية 0.05

معطى معك الجدول التالي:

	Test Value = 3.2					
Grade Point Avg.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff.	95% C.I. for the Diff. Lower	Upper
	3.36	149	0.001	6.69E-02	2.78E-02	0.106

* ما هي فرضية العدم؟ $H_0: \mu = 3.2$
* ما هي الفرضية البديلة؟ $H_0: \mu \neq 3.2$
* ما هو التقدير النقطي لمتوسط الدرجات؟ $\bar{X} = 0.069 + 3.2 = \boxed{3.269}$
* أوجد 95% فترة ثقة لمتوسط الدرجات؟

$L = 0.0278 + 3.2 = 3.2278$

$U = 0.106 + 3.2 = 3.306$

$\Rightarrow (3.23, 3.31)$ is 95% C.I. for μ

* ما هي قيمة P-Value = قيمة مستوى الدلالة ~~المقدرة~~ المقدرة؟ او مستوى المعنوية المقدر

$$\text{P-Value} = \boxed{0.001}$$

* القرار: اذا كانت P-Value < α (اقل من) نرفض H_0

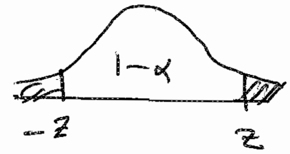
= = = > α (اكبر من) نقبل H_0

في هذه الحالة P-Value = 0.001 اقل من α = .05 نرفض H_0

* التفسير: ان متوسط درجات الطلبة تختلف عن 3.2

(2) اختبار الفرضيات حول P

- الفرضيات $H_0: P = P_0$ vs. $H_1: P \neq P_0$
- قيمة احصاء الاختبار $Z = \dfrac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0 q_0}{n}}}$
- نرفض H_0 اذا كانت قيمة Z أكبر من z او اقل من $-z$



نقبل H_0 اذا كانت قيمة Z بين $-z, z$

مثال: تم اخذ عينة من 100 شخص وتبين بان 60 منهم مدخنين. اختبر عند مستوى معنوية 0.01 فيما اذا كانت نسبة المدخنين العالية تختلف عن 50%.

(1) اكتب فرضية العدم $H_0: P = 0.5$

(2) اكتب الفرضية البديلة $H_1: P \neq 0.5$

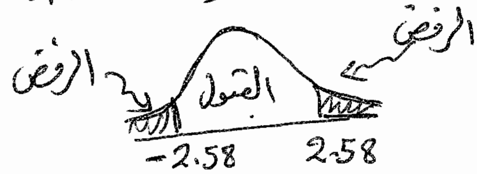
(3) احسب ~~احصاء الاختبار~~ التقدير للنسبة P

$$\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{60}{100} = 0.6$$

(4) احسب قيمة احصاء الاختبار

$$Z = \frac{\hat{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0 q_0}{n}}} = \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{\frac{(0.5)(0.5)}{100}}} = \frac{0.1}{0.5/10} = \boxed{2}$$

(5) القرار $\alpha = .01 \Leftarrow 1-\alpha = .99 \Leftarrow$ معامل الثقة 2.58



بما أن قيمة احصاء الاختبار = 2 تقع بين -2.58 و 2.58 نقبل H_0

(6) التفسير: نستطيع القول بان نسبة المدخنين = 50%

(7) فترة الثقة 99%: $(0.6 - .13, 0.6 + .13) = (.47, .73)$ نلاحظ ان $0.5 \in$ الفترة $\Rightarrow$ (نقبل H_0)